数理解析研究所講究録
900 巻 1995 年 53-55

積分方程式の漸近周期解

古用　哲夫（Furumochi Tetsuo）島根大理

これは南イリノイ大学の T.A. Burton 教授との共同研究である。
次の形の積分方程式を考える。

$$x(t) = a(t) - \int_0^t D(t, s, x(s))ds \tag{1}$$

ここで $a : R^+(:= [0, \infty)) \to R^n, D : R^+ \times R^+ \times R^n \to R^n$ は連続で次を満たすとする。

$$a(t) = p(t) + q(t), p(t+T) = p(t) \qquad \text{and} \qquad q(t) \to 0 \text{ as } t \to \infty \tag{2}$$

ここで $p : R \to R^n$, $q : R^+ \to R^n$ は連続で $T > 0$ は定数である。

$$D(t, s, x) = P(t, s, x) + Q(t, s, x) \qquad \text{and } P(t+T, s+T, x) = P(t, s, x) \tag{3}$$

ここで $P : R \times R \times R^n \to R^n, Q : R^+ \times R^+ \times R^n \to R^n$ は連続である。更に、$\forall J > 0$ に対して、連続な $P_J : R \times R \to R^+$ と $Q_J : R^+ \times R^+ \to R^+$ が存在して次を満たすとする。

$$P_J(t+T, s+T) = P_J(t, s), \qquad t, s \in R$$

$$|P(t, s, x)| \leq P_J(t, s), \qquad t, s \in R, |x| \leq J,$$

ここで $|\cdot|$ は Euclidean norm とする。

$$|Q(t, s, x)| \leq Q_J(t, s), \qquad t, s, \in R, |x| \leq J,$$

$$\int_{-\infty}^t P_J(t+\tau, s)ds \to 0 \qquad \text{uniformly for } t \in R \text{ as } \tau \to \infty \tag{4}$$

$$\int Q_J(t, s)ds \to 0 \qquad \text{as } t \to \infty. \tag{5}$$

条件(4)は $\int_{-\infty}^t P_J(t, s)ds$ が t の連続関数であることと同値であることが知られている([6])。以下で、次の Schauder's first theorem を用いて、(1)の漸近周期解の存在を示す。

Theorem 1 (Schauder's first theorem). $(C, \|\cdot\|)$ をノルム空間、S を C の compact convex nonempty subset とする。この時 S を S に写すどの連続写像も不動点をもつ。

まず、次の定理が成り立つ。

Theorem 2. (2)-(5) を仮定する。もし、(1) が初期時刻 $t_0 \in R^+$ の漸近T-周期解をもてば、そのT-周期的拡張は

$$x(t) = p(t) - \int_{-\infty}^{t} P(t, s, x(s))ds, \qquad t \in R \tag{6}$$

のT-周期解である。

$\forall t_0 \in R^+$ に対し
$C(t_0) := \{\xi : R^+ \to R^n, bdd., \xi(t)$ はt_0以外で連続で、$\xi(t_0) = \xi(t_0+)\}$ とし、$\forall \xi \in C(t_0)$ に対し

$$\|\xi\|_+ := \sup\{|\xi(t)| : t \in R^+\}$$

とする。更に、$\forall J > 0$に対し、

$$C_J(t_0) := \{\xi \in C(t_0) : \|\xi\| \le J\}$$

とする。Schauder's first theorem を用いて(1)の漸近T-周期解の存在を示すために、(2)-(5) に加えて次の様な仮定をおく。ある $t_0 \in R^+$ と $J > 0$ に対して、

$$\|a\|_{t_0} + \int_0^t P_J(t, s)ds + \int_0^t Q_J(t, s)ds \le J \text{ if } t \ge t_0 \tag{7}$$

ここで $\|a\| := \sup\{|a(t)| : t \ge t_0\}$ である。更に連続関数 $L_J : R \times R \to R^+, q_J : [t_0, \infty) \to R^+$ が存在して、$L_J(t + T, s + T) = L_J(t, s)$ かつ

$$|P(t, s, x) - P(t, s, y)| \le L_J(t, s)|x - y| \text{ if } t, s \in R, |x| \le J \text{ and } |y| \le J, \tag{8}$$

$$q_J(t) \to 0 \text{ as } t \to \infty, \tag{9}$$

(10)
$$|q(t)| + \int_{-\infty}^{t_0} P_J(t, s)ds + \int_0^{t_0} P_J(t, s)ds + \int_0^t Q_J(t, s)ds + \int_{t_0}^t L_J(t, s)ds \le q_J(t) \qquad \text{if } t \ge t_0.$$

この時、次の定理を得る。

Theorem 3. (2)-(5) に加えて、ある $t_0 \in R$ と $J > 0$ に対して (7)-(10) が成立しているとする。この時、$\sup\{|\phi_0(s)| : 0 \le s < t_0\} \le J$ なる任意の連続な初期関数 $\phi_0 : [0, t_0) \to R^n$ に対して、(1) は次の様な漸近T-周期解をもつ。

$$x(t) = y(t) + z(t), x, y \in C_J(t_0), y(t + T) = y(t) \qquad \text{on } R^+,$$
$$[t_0, \infty) \text{ 上で} x(t) \text{ は} (1) \text{ を満たし、} |z(t)| \le q_J(t).$$

更に、$y(t)$ の R 上への T-周期的拡張は (7) の T-周期解である。

最後に、Theorem 3 の応用例を示す。次の二つの線形と非線形のスカラー方程式を考える。

$$x(t) = p(t) + \rho e^{-t} - \int_0^t (e^{-t+s} \cos t \sin s + e^{-t-s}/5) x(s) ds, \qquad t \in R^+ \tag{11}$$

$$x(t) = p(t) + \rho e^{-t} - \int_0^t (\sigma e^{-t+s} + \tau e^{-t-s}) x^2(s) ds, \qquad t \in R^+ \tag{12}$$

Theorem 3 を用いて、(11) や (12) がしかるべき条件の下で漸近2π-周期解をもつことを示すことが出来る。

Theorems 2, 3 の証明等の詳しい内容については、[3] を参照されたい。

参考文献

[1] Burton, T.A., Volterra Integral and Differential Equations, Academic Press, Orlando, 1983.

[2] Burton, T.A., Stability and Periodic Solutions of Ordinary and Functional Differential Equations, Academic Press, Orlando, 1985.

[3] Burton, T.A. and Furumochi, Tetsuo, Periodic and asymptotically periodic solutions of Voltera integral equations, to appear in Funkcialaj Ekvacioj.

[4] Corduneanu, C., Integral Equations and Applications, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[5] Gripenberg, G., Londen, S,-O., and Staffans, O., Volterra Integral and Functional Equations, Cambridge U. Press, Cambridge, 1990.

[6] Hino, Y. and Murakami, S., Periodic solutions of a linear Volterra system, Proc. Equadiff Conference, ed. by C.M. Dafermos, G. Ladas, and G. Papanicolau, Dekker, New York, 1989, 319-326.

[7] Kato, J. and Yoshizawa, T., Remarks on global properties in limiting equations, Funkcialaj Ekvacioj 24(1981), 363-371.

[8] Smart, D.R., Fixed Point Theorems, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980.

[9] Yoshizawa, T., Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost Periodic Solutions, Springer, New York, 1975.